Bellavista, 17 de octubre, 2022

Señor(a):

RESOLUCIÓN DECANAL N° 125-2022-D-FCNM. - Bellavista 17 de octubre de 2022.- EL DECANO DE LA FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO:

Visto el OFICIO Nº 06-2022-JET-EPM-FCNM, recibido en forma virtual el 06 de octubre de 2022, por medio del cual el Presidente del Jurado Evaluador del Proyecto de Tesis presenta el Dictamen, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática, e informa, que el proyecto titulado "EXISTENCIA Y UNICIDAD DE UNA CONEXIÓN AFÍN SIMÉTRICA Y COMPATIBLE CON LA MÉTRICA EN UNA VARIEDAD RIEMANNIANA" presentado por el Bachiller VIVAS PACHAS JORGE LUIS; ha sido evaluado y se resuelve aprobarlo.

CONSIDERANDO:

Que, el Art. 32° de la Ley Universitaria Ley N° 30220, norma que las Facultades son unidades de formación académica, profesional y de gestión, el Art. 70° numeral 2, 3 y 5, norma las atribuciones del Decano, a través de los Directores de los Departamentos, Directores de las Escuelas Profesionales, Unidad de Investigación y la unidad de Posgrado, y las demás dependencias, respectivamente; a fin de lograr un desarrollo académico y administrativo eficaz y eficiente, concordante con la misión, visión y valores de la Facultad FCNM;

Que, mediante Resolución del Consejo Universitario Nº 099-2021-CU de fecha 30 de junio del año 2021, se aprobó el Reglamento de Grados y Títulos de Pregrado de la Universidad Nacional del Callao, señalando en el Art. 33° que la titulación profesional por la modalidad de tesis se realiza por uno de los dos procedimientos: a) Sin ciclo de tesis, y b) Con ciclo de tesis; asimismo, en su Art. 73° precisa sobre la documentación que debe presentar el estudiante o egresado para aprobar su proyecto de tesis y acceder a la titulación profesional mediante dicha modalidad;

Que, con Resolución Rectoral Nº 285-2021-R de fecha 17 de mayo de 2021, se aprobó la Directiva Nº 002-2021-R PARA LA TITULACIÓN PROFESIONAL POR LA MODALIDAD DE TESIS CON CICLO DE TALLER DE TESIS EN LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO;

Que, con RESOLUCIÓN DECANAL Nº 021-2019-D-FCNM de fecha 04 de febrero de 2019 se aprueba la APERTURA, INSCRIPCIÓN Y DESARROLLO DEL TERCER CICLO TALLER DE TESIS DE LA FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO, designándose al mismo tiempo, al Profesor ordinario, adscrito al Departamento Académico de Matemática Lic. JUAN BENITO BERNUI BARROS, Coordinador del Tercer Ciclo Taller de Tesis, para la obtención del Título Profesional de Licenciado en Matemática, cumpliendo con las funciones establecidas en los artículos 46°, 47° 48° y 49° del Reglamento de Grados y Títulos de la Universidad Nacional del Callao, aprobado mediante Resolución de Consejo Universitario Nº 099-2021-CU, de fecha el 30 de junio de 2021;

Que, con Resolución de Consejo de Facultad Nº 028-2021-CF-FCNM de fecha 15 de marzo del 2021, se aprobó el PROYECTO DEL III CICLO TALLER DE TESIS PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO, que incluye el Cronograma de Actividades, docentes de cada módulo, **Asesores**, programación horaria, presupuesto y Personal Administrativo, con las modificaciones realizadas por el Consejo de Facultad, el mismo que consta de once (11) páginas;

Que, mediante RESOLUCIÓN DECANAL Nº 089-2022-D-FCNM de fecha 26 de agosto de 2022 se Designó, Jurado Evaluador de Proyecto de Tesis para obtener el título profesional de Licenciado en Matemática, del proyecto titulado: "ESTABILIDAD LOCAL DE LOS PUNTOS DE EQUILIBRIO PARA UN MODELO DE CRECIMIENTO TUMORAL CON QUIMIOTERAPIA" presentado por el Sr. Bachiller TAYRO TAYRO WILLY HÉCTOR; Jurado que está integrado por los siguientes profesores: Dr. JULIO CÉSAR NÚÑEZ VILLA (Presidente), Dr. EDINSON MONTORO ALEGRE (Vocal), Dr. DIONICIO ORLANDO MORENO VEGA (Secretario), Lic. GABRIEL RODRÍGUEZ VARILLAS (Suplente);

Que, estando vigente el Estado de Emergencia Nacional y de Aislamiento Social Obligatorio establecido en el marco del Decreto de Urgencia N° 026-2020 por las graves circunstancias que afectan la vida de la Nación a consecuencia del brote del COVID-19. Se ha emitido la Resolución de Consejo Universitario N° 068-2020-CU, de fecha 25 de marzo de 2020, mediante la cual se resuelve "autorizar con eficacia anticipada, del 16 de marzo de 2020, y hasta que concluya el estado de emergencia nacional, la modificación del lugar de la prestación de servicios docentes y administrativos;

Que, corrido el trámite de la solicitud del recurrente, el presidente del Jurado Evaluador del Proyecto de Tesis presenta en forma virtual en mesa de partes de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática, el 06 de octubre de 2022, el Dictamen del proyecto de Tesis titulado: "EXISTENCIA Y UNICIDAD DE UNA CONEXIÓN AFÍN SIMÉTRICA Y

COMPATIBLE CON LA MÉTRICA EN UNA VARIEDAD RIEMANNIANA" presentado por el Bachiller VIVAS PACHAS JORGE LUIS, el cual, ha sido evaluado en su forma y fondo, dictaminando su aprobación;

Estando a lo glosado; a la documentación que obra en autos; a lo normado en el Reglamento de Grados y Títulos; y en uso de las atribuciones que le confiere el Art. 187° del Estatuto de la Universidad Nacional del Callao, modificado en Resolución de Asamblea Universitaria Nº 008-2022-AU, de fecha 28 de junio de 2022 y concordante con el Art. N° 70° de la ley universitaria, Ley N° 30220;

RESUELVE:

1º. APROBAR, con eficacia anticipada el Proyecto de Tesis para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática, titulado: "**EXISTENCIA Y UNICIDAD DE UNA CONEXIÓN AFÍN SIMÉTRICA Y COMPATIBLE CON LA MÉTRICA EN UNA VARIEDAD RIEMANNIANA**" presentado por el Bachiller VIVAS PACHAS JORGE LUIS; en el Tercer Ciclo Taller de Tesis para la obtención del Título Profesional de Licenciado en Matemática, de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática, de la Universidad Nacional del Callao.

2º. AUTORIZAR, a la Unidad de Investigación inscribir el tema de tesis y su autor señalado en la presente Resolución, en el Libro de Registro de Tesis, de acuerdo con el Reglamento de Grados y Títulos vigente.

3º. TRANSCRIBIR, la presente Resolución a los miembros del Jurado Evaluador, profesor asesor, Escuela Profesional y Departamento Académico de Matemática, Unidad de Investigación, Comisión de Grados y Títulos e interesado, para conocimiento y fines.

REGÍSTRESE, COMUNÍQUESE Y ARCHÍVESE

Fdo. **Dr. JUAN ABRAHAM MÉNDEZ VELÁSQUEZ**. -Decano y Presidente del Consejo de Facultad de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao.

Fdo. **Mg. GUSTAVO ALBERTO ALTAMIZA CHÁVEZ**.-Secretario Académico
Lo que transcribo a usted para los fines pertinentes.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

Dr. Juan Abraham Méndez Velásquez
Decano

PROVEÍDO N°619-2022-D-FCNM

Ref. : **OFICIO N° 06-2022-JET-EPM-FCNM**
DICTAMEN N° 06-2022-JET-FCNM
Jurado Evaluador del Proyecto de Tesis
III CICLO TALLER DE TESIS FCNM 2021
Bach. VIVAS PACHAS, Jorge Luis
Escuela Profesional de Matemática

DERÍVESE, el documento indicado de la referencia a la **Oficina de Secretaría Académica de la FCNM**, para la emisión de la respectiva resolución.

Bellavista, 07 de octubre de 2022

Atentamente,

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

Dr. Juan Abraham Méndez Velásquez
Decano

JAMV/hc
Archivo

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

JURADO EVALUADOR DE TESIS

(R. D. Nº 089-2022-D-FCNM)

Lima, 06 octubre 2022

OFICIO Nº 06-2022-JET-EPM-FCNM

Señor

Dr. Juan A. Méndez Velásquez
Decano de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
Presente.-

De mi consideración:

Tengo el agrado de dirigirme a usted para expresarle un cordial saludo y en atención al Memorando Nº 055-2022-D-FCNM, remitir a su despacho el expediente con el Dictamen del Jurado Evaluador del Proyecto de Tesis titulada: "Existencia Y Unicidad De Una Conexión Afín Simétrica Y Compatible Con La Métrica En Una Variedad Riemanniana" presentado por el bachiller Vivas Pachas Jorge Luis.

Atentamente,

…………………………………..
Dr Julio César Nuñez Villa
Presidente de Jurado Evaluador de Tesis

06 de octubre 2022

DICTAMEN N°06-2022- JET-FCNM

El Jurado Evaluador del Proyecto de Tesis: "EXISTENCIA Y UNICIDAD DE UNA CONEXIÓN AFÍN SIMÉTRICA Y COMPATIBLE CON LA MÉTRICA EN UNA VARIEDAD RIEMANNIANA" presentado por el bachiller Vivas Pachas Jorge Luis, designado con Resolución Decanal Nº 089-2022-D-FCNM, reunido en sesión virtual ordinaria del día miércoles 05 de octubre a las 23: 00 hrs., revisan cuidadosamente el Proyecto de Tesis presentado, en forma y fondo; por lo que el Jurado de Proyecto de Tesis toman el siguiente:

ACUERDO:

1 º **Aprobar** el proyecto de tesis titulado: "EXISTENCIA Y UNICIDAD DE UNA CONEXIÓN AFÍN SIMÉTRICA Y COMPATIBLE CON LA MÉTRICA EN UNA VARIEDAD RIEMANNIANA" presentado por el bachiller Vivas Pachas Jorge Luis.

2º Remitir al Señor Decano de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática el presente dictamen, acompañado la versión virtual del expediente respectivo para que, según lo dispuesto por el Reglamento de Grados y Títulos de Pregrado de la Universidad Nacional del Callao, se continúe con el trámite.

………………………………	………………………………	………………………………
Dr. Julio César Nuñez Villa	Dr. Edinson Montoro Alegre	Dr. Dionicio Orlando Moreno Vega
Evaluador de Tesis	Jurado Evaluador de Tesis	Jurado Evaluador de Tesis
PRESIDENTE	VOCAL	SECRETARIO

Lic. Gabriel Rodríguez Varillas
Jurado Evaluador de Tesis
SUPLENTE

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
JURADO EVALUADOR DE TESIS

CITACION N° 006-2022-JEPT-FCNM

Señores

Dr. Nuñez Villa Julio César
Dr. Edinson Montoro Alegre
Dr. Dionicio Orlando Morena Vega
Lic. Gabriel Rodríguez Varillas
Miembros del Jurado Evaluador de Tesis
Presente.-

A través del presente cito a usted con carácter de urgencia a la reunión a llevarse a cabo en la fecha, hora y lugar siguientes:

Fecha : Miércoles 5 de octubre del 2022
Hora : 23:00
Enlace : https://meet.google.com/uaq-cygq-bbi

AGENDA

- ✓ Expediente de tesis "Existencia Y Unicidad De Una Conexión Afín Simétrica Y Compatible Con La Métrica En Una Variedad Riemanniana" del Bachiller Vivas Pachas Jorge Luis.

*Se adjunta RESOLUCIÓN DECANAL Nº 089-2022-D-FCNM

Lima, 5 de octubre del 2022

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICA
JURADO EVALUADOR DE PROYECTO DE TESIS

Dr. Nuñez Villa Julio César
Presidente

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
JURADO EVALUADOR DE TESIS

CITACION N° 006-2022-JEPT-FCNM

Señores

Dr. Nuñez Villa Julio César
Dr. Edinson Montoro Alegre
Dr. Dionicio Orlando Morena Vega
Lic. Gabriel Rodríguez Varillas
Miembros del Jurado Evaluador de Tesis

Presente.-

A través del presente cito a usted con carácter de urgencia a la reunión a llevarse a cabo en la fecha, hora y lugar siguientes:

Fecha : Miércoles 5 de octubre del 2022
Hora : 23:00
Enlace : https://meet.google.com/uaq-cygq-bbi

AGENDA

- ✓ Expediente de tesis "Existencia Y Unicidad De Una Conexión Afín Simétrica Y Compatible Con La Métrica En Una Variedad Riemanniana" del Bachiller Vivas Pachas Jorge Luis.

*Se adjunta RESOLUCIÓN DECANAL Nº 089-2022-D-FCNM

Lima, 5 de octubre del 2022

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICA
JURADO EVALUADOR DE PROYECTO DE TESIS

Dr. Nuñez Villa Julio César
Presidente

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
JURADO EVALUADOR DE TESIS

ASISTENCIA

(Miércoles 5 de octubre del 2022)

CITACION N° 006-2022-JEPT-FCNM
Miembros del Jurado Evaluador de Tesis

Señores

Dr. Julio César Nuñez Villa ____________________

Dr. Edinson Montoro Alegre ____________________

Dr. Dionicio Orlando Morena Vega ____________________

Lic. Gabriel Rodríguez Varillas ____________________

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
JURADO EVALUADOR DE TESIS

CARGO

(Miércoles 5 de octubre del 2022)

CITACION N° 006-2022-JEPT-FCNM
Miembros del Jurado Evaluador de Tesis

Señores

Dr. Julio César Nuñez Villa ____________________

Dr. Edinson Montoro Alegre ____________________

Dr. Dionicio Orlando Morena Vega ____________________

Lic. Gabriel Rodríguez Varillas ____________________

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

“EXISTENCIA Y UNICIDAD DE UNA CONEXIÓN AFÍN SIMÉTRICA Y COMPATIBLE CON LA MÉTRICA EN UNA VARIEDAD RIEMANNIANA"

AUTOR: JORGE LUIS VIVAS PACHAS

ASESOR: CÉSAR AUGUSTO ÁVILA CÉLIS

LÍNEA DE INVESTIGACIÓN: GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

Callao, 2022

PERÚ

Jorge Luis Vivas Pachas

Bachiller

César Augusto Ávila Célis

Asesor

INFORMACIÓN BÁSICA

FACULTAD: Facultad de Ciencias Naturales y Matemática

UNIDAD DE INVESTIGACIÓN: Departamento de Matemática

TITULO: Existencia y unicidad de una conexión afín simétrica y compatible con la métrica en una variedad riemanniana

AUTOR: Jorge Luis Vivas Pachas / ORCID: 0000-0001-7739-830X

ASESOR: César Augusto Ávila Célis / ORCID: 0000-0001-5298-9488

LUGAR DE EJECUCIÓN: Facultad de Ciencias Naturales y Matemática

UNIDAD DE ANÁLISIS: Geometría riemanniana

TIPO DE INVESTIGACIÓN: Básico

TEMA OCDE: 1.01.01 -- Matemáticas Puras

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

La geometría riemanniana surgió a partir de un desarrollo natural de la geometría de las superficies de $\mathbb{R}^3$. Muchos de los resultados sobre superficies fueron obtenidos por Karl Friedrich Gauss en el trabajo titulado: *General Investigations of Curved Surfaces*. En él, Gauss definió una forma cuadrática llamada primera forma fundamental la cual nos permite calcular las longitudes de líneas sobre la superficie, encontrar las geodésicas y calcular la curvatura gaussiana, todo eso sin considerar el espacio donde la superficie se encuentra. En suma, Gauss mostró como estudiar la geometría de las superficies operando exclusivamente sobre la propia superficie. En 1854, Bernhard Riemann en su conferencia *On the Hypotheses which lie at the Bases of Geometry*, generalizó las ideas de Gauss. Usando un lenguaje intuitivo, sin definiciones precisas ni demostraciones cuidadosas, Riemann introdujo lo que hoy llamamos una variedad de dimensión d (un objeto que generaliza la noción de superficie para cualquier dimensión y sin mención a un espacio ambiente) y postuló que una geometría era un modo de medir longitudes en una determinada variedad. Para cada punto de esta, él impuso una distancia (métrica) y examinó la noción de curvatura. La audaz concepción de Riemann no fue bien entendida en su época, y solo lentamente se desarrolló lo que hoy llamamos geometría riemanniana. El concepto formal de variedad solo apareció en 1913 debido a Hermann Weyl.

En su trabajo, Riemann dejó claro que el concepto fundamental en geometría es el que hoy en día denominamos métrica riemanniana. Esta posibilita definir la longitud de una curva y el área de una región contenidas en una variedad. Podemos adicionar una métrica a cualquier variedad usando la partición de la unidad. Una variedad riemanniana es una variedad diferenciable provista de una métrica. Alrededor de 1956 el matemático americano John Nash probó que: *Toda variedad riemanniana puede ser sumergida isométricamente en algún* $\mathbb{R}^d$. Esto significa que toda variedad riemanniana puede ser visualizada como una subvariedad del espacio euclidiano. En el presente proyecto de investigación demostraremos el *Teorema de Levi-Civita*, conocido también como el *Teorema Fundamental de la Geometría Riemanniana*, el cual garantiza la existencia y unicidad de una conexión afín simétrica y compatible con la métrica en una variedad riemanniana.

I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción de la realidad problemática

A partir del concepto de una conexión afín, la cual fue definida primero por Christoffel y el punto de vista moderno es debido a Koszul, señalamos que un resultado fundamental en geometría diferencial afirma que existe una única conexión afín simétrica y compatible con la métrica en una variedad riemanniana. Esta conexión afín es conocida como la conexión de Levi-Civita o conexión riemanniana a pesar que Levi-Civita (1916) empleaba la palabra *paralelismo* para referirse a ella. Sin embargo, mantendremos la denominación actual debido a que la palabra *paralelismo* tiene connotaciones más geométricas. Este resultado se constituye en el *Teorema de Levi-Civita* o *Teorema Fundamental de la Geometría Riemanniana*. La demostración estándar de este teorema es presentada mediante una elegante operación algebraica que emplea campos vectoriales, corchetes de Lie, productos internos y derivadas covariantes entre sí.

En el presente proyecto de investigación, nuestro problema radica en la complejidad que posee el objeto matemático conexión de Levi-Civita debido a su naturaleza por tratarse de un objeto abstracto.

1.2. Formulación del problema

1.2.1. Problema general

¿Existe una única conexión afín simétrica y compatible con la métrica en una variedad riemanniana?

1.2.2. Problemas específicos

- ¿Existe un único campo vectorial que caracteriza a la métrica como una transformación sobre el fibrado tangente de una variedad riemanniana?
- ¿Es posible definir una conexión de Levi-Civita a partir de la caracterización de la métrica como una transformación sobre el fibrado tangente de una variedad riemanniana?

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

Demostrar la existencia y unicidad de una conexión afín simétrica y compatible con la métrica en una variedad riemanniana.

1.3.2. Objetivos específicos

- Demostrar la existencia y unicidad de campo vectorial que caracteriza a la métrica como una transformación sobre el fibrado tangente de una variedad riemanniana.
- Definir una conexión de Levi-Civita a partir de la caracterización de la métrica como una transformación sobre el fibrado tangente de una variedad riemanniana.

1.4. Justificación

En una variedad riemanniana arbitraria existe una conexión afín que se distingue, la conexión de Levi-Civita o conexión riemanniana. Esta conexión afín, que satisface dos propiedades (simetría e invariancia de la métrica riemanniana), admite reformulaciones notables tanto en una subvariedad riemanniana como en una variedad cociente que la hace particularmente adecuada en el contexto de los algoritmos numéricos. Además, en un espacio euclidiano, la conexión de Levi-Civita se reduce a la conexión canónica: la derivada direccional clásica.

Es así que, por lo justificado anteriormente, se hace relevante el estudio de la conexión de Levi-Civita que reside en la demostración del *Teorema de Levi-Civita*.

1.5. Delimitantes de la investigación

1.5.1. Teórica

No aplica a este tipo de proyecto de investigación.

1.5.2. Temporal

No aplica a este tipo de proyecto de investigación.

1.5.3. Espacial

No aplica a este tipo de proyecto de investigación.

II. MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes: Internacional y nacional

2.1.1. Antecedentes internacionales

En Estados Unidos de América, Millman y Stehney (1973) publicaron un artículo titulado *The Geometry of Connections*. Los autores analizaron la relación que existe entre el transporte paralelo y tres estructuras geométricas: la conexión afín, la conexión riemanniana y la conexión en un fibrado principal. Los investigadores comenzaron presentando la conexión afín y el transporte paralelo, mostrando que esos dos conceptos son equivalentes. Luego, definieron una métrica riemanniana sobre una variedad diferenciable, mostrando que toda métrica riemanniana da origen a una conexión afín llamada conexión riemanniana y en este caso el transporte paralelo es una isometría. Finalmente, mostraron que la noción de transporte paralelo en una variedad es equivalente a la propiedad de levantamiento único de caminos equivariante en el fibrado de los referenciales. Definieron una conexión en un fibrado tangente y probaron que ella también es equivalente a la propiedad de levantamiento único de caminos.

Por otro lado, en Brasil, la tesis de maestría de Ferreira (2010) titulada *Conexões e transporte paralelo: uma abordagem computacional* presenta un estudio de los conceptos de conexión, transporte paralelo y grupo de holonomia. El autor define las conexiones de forma algebraica y considera que un ejemplo importante es la conexión de Levi-Civita. El investigador demuestra que el módulo de las secciones de un fibrado vectorial admite una conexión. Asimismo, afirma que es posible obtener el grupo de holonomia si una conexión determina el transporte paralelo a lo largo de un camino cerrado. En este trabajo de investigación, Ferreira (2010) expresa su preocupación con los aspectos computacionales, de este modo, comentarios sobre la implementación del cálculo de los conceptos presentados en softwares de computación algebraica están presentes en todo el texto.

De la misma forma, en la tesis doctoral de Nunes (2005) titulada *Pontos críticos da conexão riemanniana sobre campos de vetores*, el autor prueba diversos teoremas de existencia, unicidad y caracterización de los puntos y de los valores críticos de la conexión riemanniana de una variedad riemanniana compacta, orientable, actuando en los espacios de campos diferenciables de la variedad con norma L^2 un y con norma puntual un.

Para finalizar, en Dinamarca, Kock (1998) publicó un artículo titulado *Geometric Construction of the Levi-Civita Parallelism*. El autor afirma que la demostración del *Teorema de Levi-Civita* tiene un tratamiento puramente algebraico y la componente geométrica no es muy explícita. Por ende, en términos de geometría diferencial sintética, el investigador proporciona una caracterización variacional de la conexión (paralelismo) asociada a una métrica pseudo-riemanniana en una variedad.

2.1.2. Antecedentes nacionales

En el ámbito nacional no se cuenta con investigaciones orientadas al estudio de la existencia y unicidad de una conexión afín simétrica y compatible con la métrica en una variedad riemanniana.

2.2. Bases teóricas

Nociones elementales de topología

Definición 2.1. Sea X un conjunto no vacío. Una topología sobre X es un subconjunto $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(X)$ (conjunto de partes de X) tal que

i) $\emptyset \in \mathcal{T}$ y $X \in \mathcal{T}$,

ii) toda reunión de elementos de $\mathcal{T}$ es un elemento de $\mathcal{T}$,

iii) toda intersección finita de elementos de $\mathcal{T}$ es un elemento de $\mathcal{T}$.

El par $(X, \mathcal{T})$ se denomina *espacio topológico* y lo denotaremos simplemente por X cuando no haya riesgo de confusión.

Los elementos de $\mathcal{T}$ se llaman *abiertos* de X y el complementario (en X) de un abierto se denomina *cerrado*.

Definir una topología en X es dar una noción de proximidad y por tanto de entorno: diremos que $\mathcal{U}$ es un *entorno abierto* de $x \in X$ si $\mathcal{U}$ contiene un abierto que a su vez contiene a x. Evidentemente toda parte de X que contiene un entorno abierto de x es ella misma un entorno abierto de x.

Definición 2.2. Sean $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{S})$ espacios topológicos. Diremos que una aplicación $f: X \to Y$ es *continua en el punto* $x \in X$ si para todo entorno abierto $\mathcal{V}$ de $y = f(x)$ en Y existe un entorno abierto $\mathcal{U}$ de x en X tal que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$.

Diremos que f es *continua* en X si es continua en todo punto de X. Es sencillo verificar que f es continua si y solo si la imagen recíproca por f de cualquier abierto de Y respecto a $\mathcal{S}$ es una abierto de X respecto a $\mathcal{T}$.

Diremos que la aplicación f es *abierta* cuando la imagen directa de todo abierto de X es una abierto de Y. Si f es biyectiva, continua y abierta diremos que f es un *homeomorfismo* de X en Y.

Definición 2.3. Sea X un conjunto dotado de dos topologías $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$. Diremos que $\mathcal{T}_1$ es *más fina* que $\mathcal{T}_2$ si satisface una de las siguientes condiciones equivalentes

i) $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$,

ii) toda parte de X cerrada respecto a $\mathcal{T}_2$ es cerrada respecto a $\mathcal{T}_1$,

iii) la aplicación $id_X: (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$ es continua.

Definición 2.4. Diremos que un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es *separado* o *de Hausdorff*, si para cualesquiera x e y de X distintos existen entornos abiertos $\mathcal{U}$ de x y $\mathcal{V}$ de y tales que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$.

Definición 2.5. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Una clase $\mathcal{B}$ de subconjuntos abiertos de X, i.e. $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$, es una *base* de la topología $\mathcal{T}$ si y solamente si

i) todo conjunto abierto $U \in \mathcal{T}$ es la unión de elementos de $\mathcal{B}$.

Equivalentemente, $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ es una base de $\mathcal{T}$ si y solamente si

ii) para cualquier punto x que pertenece a un conjunto abierto U, existe un elemento $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$.

Teorema 2.1. Sea $\mathcal{B}$ una clase de subconjuntos de un conjunto no vacío X. Entonces, $\mathcal{B}$ es base de alguna topología X si y solamente si posee estas dos propiedades:

i) $X = \bigcup\{B : B \subset \mathcal{B}\}$.

ii) Dados cualesquiera $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $B_1 \cap B_2$ es la unión de elementos de $\mathcal{B}$, o, equivalentemente, si $x \in B_1 \cap B_2$ entonces $\exists B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset B_1 \cap B_2$.

Definición 2.6. Se llama pseudométrica en X a toda aplicación $d: X \times X \to \mathbb{R}$ que satisface las propiedades siguientes

i) $d(x,y) \geq 0$

ii) $d(x,x) = 0$

iii) $d(x,y) = d(y,x)$

iv) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

El par (X,d) se denomina *espacio pseudométrico*.

Definición 2.7. Sean (X,d) un espacio pseudométrico, x_0 un elemento de X y $r > 0$. El conjunto

$$B(x_0, r) = \{x \in X; d(x, x_0) < r\},$$

se llama la *bola abierta* en X de centro x_0 y radio r.

Diremos que el conjunto U es un *abierto* de X si para todo punto $x_0 \in X$ existe un número real $r > 0$ tal que

$$B(x_0, r) \subset U.$$

Teorema 2.2. Sean (X,d) un espacio pseudométrico y $\mathcal{B}_d = \{B(x_0, r); x_0 \in X, r > 0\}$ la clase de todas las bolas abiertas en X. Entonces, $\mathcal{B}_d$ es una base para una topología $\mathcal{T}_d$ en X, llamada la topología inducida por la pseudométrica d.

Un espacio pseudométrico siempre se considera dotado de la topología inducida por su pseudométrica.

Definición 2.8. Se llama métrica o distancia en X a toda aplicación $d: X \times X \to \mathbb{R}$ que satisface las siguientes propiedades

i) $d(x, y) \geq 0$ (semidefinida positiva),

ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (separación),

iii) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetría),

iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (desigualdad triángular).

El par (X, d) se denomina *espacio métrico*.

Corolario 2.1. Si X es de Hausdorff, la pseudométrica $d: X \times X \to \mathbb{R}$ es una métrica.

Variedades diferenciables

Definición 2.9. Un *sistema de coordenadas locales* o *carta local* en un espacio topológico $\mathcal{M}$ es un homeomorfismo $\varphi: \mathcal{U} \to \varphi(\mathcal{U})$ de un subconjunto abierto $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ sobre un abierto $\varphi(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^d$, denotado por $(\mathcal{U}, \varphi)$. Cuando no haya riesgo de confusión, escribiremos simplemente φ en lugar de $(\mathcal{U}, \varphi)$.

Diremos que d es la dimensión de $\varphi: \mathcal{U} \to \varphi(\mathcal{U})$.

Para cada $x \in \mathcal{U}$ se tiene $\varphi(x) = \left(\varphi^1(x), \ldots, \varphi^d(x)\right)$. Los números $\varphi^i = \varphi^i(x)$, $i = 1, \ldots, d$, son llamados las *coordenadas* del punto $x \in \mathcal{M}$ en el sistema φ.

Definición 2.10. Dados los sistemas de coordenadas locales $\varphi: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^d$ y $\psi: \mathcal{V} \to \mathbb{R}^d$ en el espacio topológico $\mathcal{M}$, tales que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$, para cada punto $x \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ tiene coordenadas $\varphi^i = \varphi^i(x)$ en el sistema φ y coordenadas $\psi^i = \psi^i(x)$ relativamente al sistema ψ.

La correspondencia

$$\left(\varphi^1(x), \ldots, \varphi^d(x)\right) \leftrightarrow \left(\psi^1(x), \ldots, \psi^d(x)\right)$$

establece un homeomorfismo $\psi \circ \varphi : \varphi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \to \psi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$ que es llamado *cambio de coordenadas*.

Definición 2.11. Un (C^∞) *atlas* de dimensión d sobre un espacio topológico $\mathcal{M}$ en $\mathbb{R}^d$ es una colección $\mathcal{A}$ de cartas $(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)$ del conjunto $\mathcal{M}$ tal que

1. $\bigcup_\alpha \mathcal{U}_\alpha = \mathcal{M}$,
2. para cualquier par α, β con $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \neq \emptyset$ los conjuntos $\varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$ y $\varphi_\beta(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$ son conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^d$ y el cambio de coordenadas

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$$

   es *suave* (de clase C^∞, i.e., diferenciable para todo grado de diferenciación) en su dominio $\varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$. Decimos que los elementos de un atlas *se superponen suavemente*. Los dominios $\mathcal{U}_\alpha$ de los sistemas coordenados $\varphi_\alpha \in \mathcal{A}$ son llamados los *entornos coordenados* de $\mathcal{A}$.

Un espacio topológico $\mathcal{M}$ en el cual existe un atlas de dimensión d se llama una *variedad topológica* de dimensión d. En otras palabras, $\mathcal{M}$ es una variedad topológica de dimensión d si y solamente si, cada punto de $\mathcal{M}$ tiene un entorno homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^d$.

Definición 2.12. Un atlas $\mathcal{A}$ sobre un espacio topológico $\mathcal{M}$ se dice *diferenciable*, de clase C^∞, si todos los cambios de coordenadas $\psi \circ \varphi^{-1}$, φ, $\psi \in \mathcal{A}$ son aplicaciones de clase C^∞.

Definición 2.13. Sea $\mathcal{A}$ un atlas de dimensión d y de clase C^∞ en un espacio topológico $\mathcal{M}$. Un sistema de coordenadas en $\mathcal{M}$

$$\phi : \mathcal{W} \to \mathbb{R}^d$$

se dice *admisible* relativamente al atlas $\mathcal{A}$ si, para todo sistema de coordenadas locales

$$\varphi: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^d,$$

perteneciente a $\mathcal{A}$, con $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} \neq \emptyset$, los cambio de coordenadas $\phi \circ \varphi^{-1}$ y $\varphi \circ \phi^{-1}$ son de clase C^∞. En otras palabras, $\mathcal{A} \cup \{(\mathcal{U}, \varphi)\}$ es también un atlas de clase C^∞ en $\mathcal{M}$.

Definición 2.14. Dado un atlas $\mathcal{A}$, de dimensión d y clase C^∞, sobre $\mathcal{M}$. Sea $\mathcal{A}^+$ el conjunto que contiene todos los sistemas de coordenadas locales que son admisibles en relación a $\mathcal{A}$. Es fácil ver que $\mathcal{A}^+$ es también un atlas, llamado el *atlas maximal* (o *atlas completo*) generado por el atlas $\mathcal{A}$.

Todo atlas de clase C^∞ en $\mathcal{M}$ puede ser ampliado, de modo único, hasta tornarse un atlas maximal de clase C^∞: basta adicionarle todos los sistemas de coordenadas admisibles.

Un atlas maximal de un conjunto $\mathcal{M}$ es también llamado una *estructura diferenciable* en $\mathcal{M}$.

Definición 2.15. Una *variedad diferenciable*, de dimensión d y de clase C^∞ es un par ordenado $(\mathcal{M}, \mathcal{A}^+)$ donde $\mathcal{M}$ es un espacio topológico de Hausdorff y $\mathcal{A}^+$ es una atlas maximal de dimensión d y clase C^∞ sobre $\mathcal{M}$.

Vectores tangentes

Definición 2.16. Sea $\mathcal{M}$ una variedad. Una función suave

$$\gamma: \mathbb{R} \to \mathcal{M}: t \mapsto \gamma(t)$$

es denominada una *curva* en $\mathcal{M}$.

Dada una función real suave

$$f: \mathcal{M} \to \mathbb{R}: x \mapsto f(x)$$

la función

$$f \circ \gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: t \mapsto f\big(\gamma(t)\big)$$

es suave con una derivada clásica bien definida.

Definición 2.17. Sean x un punto en $\mathcal{M}$, la curva $\gamma:]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathcal{M}$ con $\gamma(0) = x$ y el conjunto $\mathfrak{F}_x(\mathcal{M}) = \{f \in C^\infty / f: \mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{M} \to \mathbb{R}\}$. La función

$$\dot{\gamma}(0) = \mathfrak{F}_x(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}$$

definida por

$$\dot{\gamma}(0)f \coloneqq \left.\frac{d\Big(f\big(\gamma(t)\big)\Big)}{dt}\right|_{t=0}, \quad f \in \mathfrak{F}_x(\mathcal{M}),$$

es llamada el *vector tangente* a la curva γ en $t = 0$.

Ahora podemos definir formalmente la noción de vector tangente.

Definición 2.18. Un *vector tangente* ξ_x a una variedad $\mathcal{M}$ en un punto x es una función

$$\xi_x: \mathfrak{F}_x(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}$$

tal que existe una curva γ en $\mathcal{M}$ con $\gamma(0) = x$, satisfaciendo

$$\xi_x f = \dot{\gamma}(0)f \coloneqq \left.\frac{d\Big(f\big(\gamma(t)\big)\Big)}{dt}\right|_{t=0}$$

para todo $f \in \mathfrak{F}_x(\mathcal{M})$. Tal curva γ es llamada a *realizar* el vector tangente ξ_x.

El punto x es llamado el *pie* del vector tangente ξ_x. A menudo omitiremos el subíndice que indica el pie y escribimos simplemente ξ por ξ_x.

Dado un vector tangente ξ a $\mathcal{M}$ en x, existen infinitas curvas γ que realizan ξ (i.e. $\dot{\gamma}(0) = \xi$). Ellas se pueden caracterizar de la siguiente manera en coordenadas locales.

Proposición 2.1. Dos curvas γ_1 y γ_2 a través de un punto x en $t = 0$ satisfacen $\dot{\gamma}_1(0) = \dot{\gamma}_2(0)$ si y solo si, dada una carta $(\mathcal{U}, \varphi)$ con $x \in \mathcal{U}$, se cumple que

$$\left.\frac{d\left(\varphi\left(\gamma_1(t)\right)\right)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d\left(\varphi\left(\gamma_2(t)\right)\right)}{dt}\right|_{t=0}.$$

Definición 2.19. El *espacio tangente* a $\mathcal{M}$ en x, denotado por $T_x\mathcal{M}$, es el conjunto de todos los vectores tangentes a $\mathcal{M}$ en x.

Corolario 2.2. El espacio tangente admite una estructura de *espacio vectorial*.

Usando una carta local, es posible mostrar que la dimensión del espacio vectorial $T_x\mathcal{M}$ es igual a d, la dimensión de la variedad $\mathcal{M}$: dada una carta $(\mathcal{U}, \varphi)$ en x, una base de $T_x\mathcal{M}$ es dada por

$$\{\dot{\gamma}_1(0), \dots, \dot{\gamma}_d(0)\},$$

donde $\dot{\gamma}_i(0) \coloneqq \varphi^{-1}(\varphi(x) + te_i)$, con e_i denotando el i-ésimo vector canónico de $\mathbb{R}^d$. Uno tiene, para cualquier vector tangente $\dot{\gamma}(0)$, la descomposición

$$\dot{\gamma}(0) = \sum_{i=1}^{d} \left(\dot{\gamma}(0)\varphi^i\right)\dot{\gamma}_i(0),$$

donde φ^i denota la i-ésima componente de φ. Esto provee una forma para definir las coordenadas de los vectores tangentes en x usando la carta $(\mathcal{U}, \varphi)$, definiendo el elemento de $\mathbb{R}^d$

$$\begin{pmatrix} \dot{\gamma}(0)\varphi^1 \\ \vdots \\ \dot{\gamma}(0)\varphi^d \end{pmatrix}$$

como la representación del vector tangente $\dot{\gamma}(0)$ en la carta $(\mathcal{U}, \varphi)$.

Definición 2.20. Dada una variedad $\mathcal{M}$, el conjunto de todos los vectores tangentes a $\mathcal{M}$:

$$T\mathcal{M} \coloneqq \bigcup_{x \in \mathcal{M}} T_x\mathcal{M}$$

es llamado *fibrado tangente* de $\mathcal{M}$.

Definición 2.21. Un *campo vectorial* ξ en una variedad $\mathcal{M}$ es una función suave

$$\xi: \mathcal{M} \to T\mathcal{M}: x \mapsto \xi_x$$

donde $\xi_x \in T_x\mathcal{M}$.

Dados un campo vectorial ξ en $\mathcal{M}$ y una función real (suave) $f \in \mathfrak{F}_x(\mathcal{M})$, denotemos por ξf a la función real

$$\xi f: \mathcal{M} \to \mathbb{R}$$

definida por

$$x \mapsto (\xi f)(x) \coloneqq \xi_x(f)$$

para todo x en $\mathcal{M}$. La suma de dos campos vectoriales y la multiplicación de un campo vectorial por una función $f \in \mathfrak{F}_x(\mathcal{M})$

$$+: T_x\mathcal{M} \times T_x\mathcal{M} \to T_x\mathcal{M}, \qquad *: \mathfrak{F}_x(\mathcal{M}) \times T_x\mathcal{M} \to T_x\mathcal{M}$$

son definidas como sigue:

$$(\xi, \eta) \mapsto +(\xi, \eta) = (\xi, \eta)_x \coloneqq \xi_x + \eta_x, \qquad (f, \eta) \mapsto * \, (f, \eta) = (\xi\eta)_x \coloneqq f(x)\xi_x$$

para todo $x \in \mathcal{M}$.

La suavidad es preservada por estas operaciones. Sea $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ el conjunto de campos vectoriales suaves en $\mathcal{M}$

$$\mathfrak{X}(\mathcal{M}) = \{\xi \in C^{\infty} / \xi: \mathcal{M} \to T\mathcal{M}\}$$

dotado con estas dos operaciones.

Sea $(\mathcal{U}, \varphi)$ una carta de una variedad $\mathcal{M}$ en x y $\{\dot{\gamma}_1(0), \dots, \dot{\gamma}_d(0)\}$ una base de $T_x\mathcal{M}$. El campo vectorial $\dot{\gamma}_i(0)$ en $\mathcal{U}$ es llamado el *i-ésimo campo vectorial coordenado* de $(\mathcal{U}, \varphi)$. Estos campos vectoriales coordenados son suaves, y todo campo vectorial ξ admite la descomposición

$$\xi = \sum_{i=1}^{d} (\xi\varphi^i)\dot{\gamma}_i(0)$$

en $\mathcal{U}$.

Métrica y distancia riemanniana

Definición 2.22. Una métrica riemanniana es una variedad diferenciable $\mathcal{M}$ es una correspondencia que asocia a cada punto $x \in \mathcal{M}$ un producto interno en el espacio tangente $T_x\mathcal{M}$.

Sea g una métrica riemanniana en $\mathcal{M}$

$$g: T_x\mathcal{M} \times T_x\mathcal{M} \to \mathbb{R},$$

indicaremos con $g(\xi_x, \zeta_x)$ el producto interno de los vectores $\xi_x, \zeta_x \in T_x\mathcal{M}$. Cuando no haya riesgo de confusión usaremos la notación $\langle \xi_x, \zeta_x \rangle_x$ o simplemente $\langle \xi_x, \zeta_x \rangle$.

Definición 2.23. Una variedad cuyos espacios tangentes son dotados con un producto interno variando suavemente es llamada una *variedad riemanniana*.

Estrictamente hablando, una variedad riemanniana es, pues una dupla $(\mathcal{M}, g)$, donde $\mathcal{M}$ es una variedad y g es una métrica riemanniana en $\mathcal{M}$.

Sea $(\mathcal{U}, \varphi)$ una carta de una variedad riemanniana $(\mathcal{M}, g)$. Las componentes de g en la carta son dadas por

$$g_{ij} \coloneqq g\left(\dot{\gamma}_i(0), \dot{\gamma}_j(0)\right),$$

donde $\dot{\gamma}_i(0)$ denota el i-ésimo campo vectorial coordenado. En consecuencia, para los campos vectoriales $\xi = \sum_i \xi^i \dot{\gamma}_i(0)$ y $\zeta = \sum_i \zeta^j \dot{\gamma}_j(0)$, tenemos

$$g(\xi, \zeta) = \langle \xi, \zeta \rangle = \langle \sum_i \xi^i \dot{\gamma}_i(0), \sum_j \zeta^j \dot{\gamma}_j(0) \rangle = \sum_{i,j} \langle \dot{\gamma}_i(0), \dot{\gamma}_j(0) \rangle \xi^i \zeta^j = \sum_{i,j} g_{ij} \xi^i \zeta^j.$$

Definición 2.24. La *longitud de una curva* $\gamma: [a, b] \to \mathcal{M}$ en una variedad riemanniana $(\mathcal{M}, g)$ es definida por

$$L(\gamma) \coloneqq \int_a^b \sqrt{g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))}\, dt.$$

Definición 2.25. La *distancia riemanniana* en una variedad riemanniana $(\mathcal{M}, g)$ es

$$d: \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathbb{R}: d(x, y) \coloneqq \inf_{\gamma \in \Gamma(x,y)} L(\gamma)$$

donde

$$\Gamma(x, y) = \{\gamma \in C^\infty / \gamma: [a, b] \to \mathcal{M}, \text{uniendo de } x \text{ a } y\}.$$

Asumiendo (como de costumbre) que $\mathcal{M}$ es de Hausdorff, se puede demostrar la siguiente proposición:

Proposición 2.2. La *distancia riemanniana* define una métrica, i.e.,

i) $d(x, y) \geq 0$ (semidefinida positiva),

ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (separación),

iii) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetría),

iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (desigualdad triangular).

2.3. Marco conceptual

La articulación de los siguientes conceptos permitirá orientar el desarrollo del presente proyecto de investigación.

- En una variedad riemanniana es posible demostrar la existencia y unicidad de un campo vectorial que caracteriza a la métrica como una transformación sobre el fibrado tangente.
- A partir de la caracterización de la métrica como una transformación sobre el fibrado tangente de una variedad riemanniana es posible definir una conexión de Levi-Civita.

2.4. Definiciones de términos básicos

Absil, Mahony y Sepulchre (2008) proporcionan los siguientes términos básicos que constituyen las definiciones pertenecientes al presente proyecto de investigación.

Variedad diferenciable: Es un espacio topológico de Hausdorff.

Espacio tangente: Es el conjunto de todos los vectores tangentes a una variedad en un punto.

Fibrado tangente: Es el conjunto de todos los vectores tangentes a una variedad.

Métrica riemanniana: Es una correspondencia que asocia a cada punto de una variedad un producto interno en el espacio tangente.

Variedad riemanniana: Es una variedad cuyos espacios tangentes son dotados con un producto interno variando suavemente.

Conexión de Levi-Civita: Es una conexión afín simétrica y compatible con la métrica en una variedad riemanniana.

III. HIPÓTESIS Y VARIABLES

3.1. Hipótesis

Hipótesis general

Existe una única conexión afín simétrica y compatible con la métrica en una variedad riemanniana.

Hipótesis específicas

- Existe un único campo vectorial que caracteriza a la métrica como una transformación sobre el fibrado tangente de una variedad riemanniana.
- Es posible definir una conexión de Levi-Civita a partir de la caracterización de la métrica como una transformación sobre el fibrado tangente de una variedad riemanniana.

3.1.1. Operacionalización de variables

Definición conceptual de variables

Variable dependiente (D)

Existencia de una única conexión afín.

Variable independiente (I)

Variedad riemanniana.

Tabla 1

Operacionalización de variables

<table>
<tr><th>Variable</th><th>Dimensiones</th><th>Indicadores</th><th>Índices</th><th>Método</th><th>Técnica</th></tr>
<tr><td rowspan="3">D</td><td>Conexión afín simétrica</td><td>Corchete de Lie</td><td>Campo vectorial</td><td rowspan="3">Teórico-práctico</td><td rowspan="3">Análisis bibliográfico</td></tr>
<tr><td>Conexión afín compatible</td><td>Producto interno</td><td>Campo vectorial</td></tr>
<tr><td>Conexión de Levi-Civita</td><td>Fórmula de Koszul</td><td>Campo vectorial</td></tr>
<tr><td rowspan="3">I</td><td>Variedad diferenciable</td><td>Espacio topológico de Hausdorff</td><td>Atlas maximal</td><td rowspan="3">Teórico-práctico</td><td rowspan="3">Análisis bibliográfico</td></tr>
<tr><td>Métrica riemanniana</td><td>Producto interno</td><td>Campo vectorial</td></tr>
<tr><td>Fibrado tangente</td><td>Campo vectorial</td><td>Campo vectorial</td></tr>
</table>

Fuente: Elaboración propia.

IV. METODOLOGÍA DEL PROYECTO

4.1. Diseño metodológico

Tipo de investigación

El presente proyecto de investigación es de tipo básico debido a que se emplean teorías matemáticas ya existentes con el propósito de ahondar en ellas, dando lugar a nuevos conocimientos.

Diseño de investigación

El presente proyecto de investigación contempla un diseño que inicia con un breve repaso de algunas nociones elementales de topología que darán el sustento necesario para explicar las definiciones básicas de variedades diferenciables.

En seguida, haremos una revisión pormenorizada de las definiciones, proposiciones y corolarios que envuelven el concepto de vector tangente. Esto, permitirá hacer lo propio con las definiciones y proposiciones que involucran el concepto métrica y distancia riemanniana.

Para finalizar, se presentará el objeto matemático conexión afín, dando énfasis a las definiciones necesarias para demostrar el *Teorema de Levi-Civita*, conocido también como el *Teorema Fundamental de la Geometría Riemanniana*, el cual garantiza la existencia y unicidad de una conexión afín simétrica y compatible con la métrica en una variedad riemanniana.

4.2. Método de investigación

Atendiendo a la naturaleza del presente proyecto de investigación, por ser del tipo básico, el método de investigación a emplear es el método teórico-práctico.

4.3. Población y muestra

No aplica a este tipo de proyecto de investigación.

4.4. Lugar de estudio

La realización del presente proyecto de investigación tendrá lugar en los ambientes del laboratorio de cómputo de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática debido a que es un espacio destinado al uso académico y cuyo acceso a internet favorece las condiciones necesarias para su realización.

4.5. Técnicas e instrumentos para la recolección de la información

No aplica a este tipo de proyecto de investigación.

4.6. Análisis y procesamiento de datos

En la realización del presente proyecto de investigación no se contempla el uso de procedimientos estadísticos ni de ningún análisis de datos debido a que el tema de investigación es netamente abstracto. Sin embargo, los trabajos de investigación que serán examinados, estarán organizados a través de los siguientes ejes temáticos: nociones elementales de topología, definiciones básicas de variedades diferenciables y definiciones básicas de variedades riemannianas.

4.7. Aspectos éticos en investigación

El presente proyecto de investigación cumple con las normas establecidas en nuestro país (artículo 427-438 del Código Penal, Ley sobre el Derecho de Autor - Decreto Legislativo N° 822), no incurriendo en el delito contra la fe pública.

4.8. Orientación hacia un proyecto de inversión

No aplica a este tipo de proyecto de investigación.

4.9. Orientación hacia un proyecto de impacto ambiental

No aplica a este tipo de proyecto de investigación.

V. CRONOGRAMA DE ACTIVIDADES

ACTIVIDADES	INICIO	FINAL	DURACIÓN	MAYO				JUNIO				JULIO				AGOSTO			
			(SEMANAS)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Capacitación teórica	03/05/22	23/05/22	3																
Componente 1: Primer objetivo específico: Demostrar la existencia y unicidad de campo vectorial que caracteriza a la métrica como una transformación sobre el fibrado tangente de una variedad riemanniana.	24/05/2022	20/06/22	4																
Componente 2: Segundo objetivo específico: Definir una conexión de Levi-Civita a partir de la caracterización de la métrica como una transformación sobre el fibrado tangente de una variedad riemanniana.	21/06/22	18/07/22	4																
Análisis y discusión de los resultados.	19/07/22	15/08/22	3																
Digitalización y defensa de tesis.	16/08/22	03/11/22	2																

Leyenda

	Clases, revisiones y presentaciones del avance
	Controles y revisiones por parte del asesor

VI. PRESUPUESTO

Especificación	Costos (S/)
Materiales y equipo de oficina	1500
Textos de especialidad	500
Fotocopias, impresiones y espiralado	300
Servicio de internet, softwares y USB	500
Ciclo de Tesis	4200
Total	**7000**

VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Absil, P., Mahony, R. & Sepulchre, R. (2008). *Optimization Algorithms on Matrix Manifolds*. New York, USA: Princeton University Press.

Do Carmo, M. P. (2015). *Geometria Riemanniana*. Rio de Janeiro, Brasil: Projeto Euclides.

Ferreira, N. (2010). *Conexões e transporte paralelo: uma abordagem computacional* (Tesis de maestría). https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/7621

Hu, S. T. (1969). *Differentiable Manifolds*. New York, USA: Holt, Rinehart and Winston Inc.

Kock, A. (1998). Geometric Construction of the Levi-Civita Parallelism. *Theory and Applications of Categories, 4*(9), 195-207. http://www.tac.mta.ca/tac/

Levi-Civita, T. (1916). Nozione di paralelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 42*, 173-204. https://doi.org/10.1007/BF03014898

Lima, E. L. (2011). *Variedades Diferenciáveis*. Rio de Janeiro, Brasil: IMPA.

Millman, R. S. y Stehney, A. K. (1973). The Geometry of Connections. *American Mathematical Monthly, vol 80*(5), 475-500. https://doi.org/10.1080/00029890.1973.11993317

Nunes, G. (2005). *Pontos críticos da conexão riemanniana sobre campos de vetores* (Tesis doctoral). http://hdl.handle.net/10183/5760

O’Neill, B. (1983). *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*. New San Diego, USA: Academic Press.

VIII. ANEXOS

Tabla 2

Matriz de consistencia

Problema	Objetivos	Hipótesis	Método de investigación	Población y muestra
Problema General ¿Existe una única conexión afín simétrica y compatible con la métrica en una variedad riemanniana?	**Objetivo general** Demostrar la existencia y unicidad de una conexión afín simétrica y compatible con la métrica en una variedad riemanniana.	**Hipótesis general** Existe una única conexión afín simétrica y compatible con la métrica en una variedad riemanniana.	Atendiendo a la naturaleza del presente proyecto de investigación, por ser del tipo básico, el método de investigación a emplear es el método teórico-práctico.	No aplica a este tipo de proyecto de investigación.
Problemas Específicos ¿Existe un único campo vectorial que caracteriza a la métrica como una transformación sobre el fibrado tangente de una variedad riemanniana?	**Objetivos Específicos** Demostrar la existencia y unicidad de campo vectorial que caracteriza a la métrica como una transformación sobre el fibrado tangente de una variedad riemanniana.	**Hipótesis Específicas** Existe un único campo vectorial que caracteriza a la métrica como una transformación sobre el fibrado tangente de una variedad riemanniana.		
¿Es posible definir una conexión de Levi-Civita a partir de la caracterización de la métrica como una transformación sobre el fibrado tangente de una variedad riemanniana?	Definir una conexión de Levi-Civita a partir de la caracterización de la métrica como una transformación sobre el fibrado tangente de una variedad riemanniana.	Es posible definir una conexión de Levi-Civita a partir de la caracterización de la métrica como una transformación sobre el fibrado tangente de una variedad riemanniana.		

Fuente: Elaboración propia.